

Муниципальный этап областной олимпиады школьников  
по математике

2020–2021 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

9 класс

1. Парабола  $y = x^2 - 20x + c$ , где  $c \neq 0$ , пересекает ось  $Ox$  в точках  $A$  и  $B$ , а ось  $Oy$  в точке  $C$ . Известно, что точки  $A$  и  $C$  симметричны относительно прямой  $y = -x$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**Ответ:** 651.

**Решение.** Поскольку  $y(0) = c$ , имеем  $C(0, c)$  и  $A(-c, 0)$ . Поэтому один из корней уравнения  $x^2 - 20x + c = 0$  равен  $-c$ , т. е.  $c^2 + 20c + c = 0$ , откуда  $c = x_1 = -21$ . По теореме Виета,  $x_1 + x_2 = 20$ . Значит,  $x_2 = 41$ . Длина основания треугольника равна  $x_2 - x_1 = 62$ , а высота 21.

**Оценивание.** За верное решение 7 б.

2. Найдите все пары натуральных чисел  $n$  и  $m$ , для которых

$$(n+1)(2n+1) = 18m^2.$$

**Ответ:** их нет.

**Решение.** Поскольку  $18m^2 = (n+1)(2n+1) > 2n^2$ ,  $9m^2 > n^2$  и  $n < 3m$ . С другой стороны, если  $n \leq 3m - 1$ , то

$$(n+1)(2n+1) \leq 3m(6m-1) < 18m^2.$$

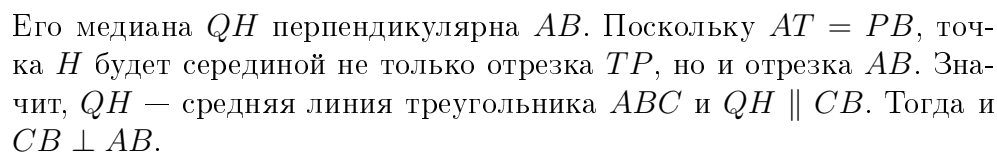
Значит,  $n > 3m - 1$ . Получилось, что  $3m - 1 < n < 3m$ . Это невозможно.

**Замечание.** Возможны и другие решения. Например, если рассмотреть уравнение как квадратное относительно  $n$ , то получим дискриминант  $144m^2 + 1$ , не являющийся квадратом при натуральном  $m$ . Ещё одно решение начинается с наблюдения о том, что  $n+1$  и  $2n+1$  — взаимно простые числа.

**Оценивание.** За верное решение 7 б.

3.  $ABC$  — треугольник. Точка  $Q$  — середина стороны  $AC$ , а на отрезке  $AB$  отмечена точка  $P$ , при этом  $AP = 2PB$ . Оказалось, что  $CP = 2PQ$ . Докажите, что угол  $ABC$  прямой.

**Доказательство.** Пусть  $T$  — середина отрезка  $AP$ . Тогда  $TQ$  — средняя линия треугольника  $APC$ , откуда  $TQ = \frac{PC}{2} = PQ$ . Поэтому треугольник  $PQT$  равнобедренный.



4. Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника,  $p+q=1$ . Докажите, что

$$pa^2 + qb^2 > pqc.$$

$$pa^2 + (1-p)b^2 > p(1-p)c,$$
$$c^2 p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0.$$
$$\begin{aligned} D &= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \\ &= (a^2 - (b + c)^2)(a^2 - (b - c)^2) = \\ &= (a - (b + c))(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c). \end{aligned}$$

По неравенству треугольника, первая скобка отрицательна, а последние две положительны. Таким образом, дискриминант отрицателен.

**Оценивание.** За верное решение 7 б. Если задача сведена к исследованию квадратного трёхчлена, но дискриминант не удалось разложить на множители, 2 балла.

**5.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — положительные числа,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt{6a_1 + 1} + \sqrt{6a_2 + 1} + \dots + \sqrt{6a_n + 1} < n + 3.$$

**1-й способ.** Просуммируем неравенства  $\sqrt{6a_i + 1} < 3a_i + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**2-й способ.** Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2},$$

положив  $x_i = \sqrt{6a_i + 1}$  и  $y_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Получим

$$\sqrt{6a_1 + 1} + \sqrt{6a_2 + 1} + \dots + \sqrt{6a_n + 1} \leq \sqrt{6 + n} \cdot \sqrt{n} < n + 3.$$

**Оценивание.** За верное решение 7 б. Если проведено доказательство только при  $n = 2$ , 2 б.