Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2020–2021 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

8 класс

1. Велосипедисты Петя, Влад и Тимур одновременно взяли старт разминочной гонки по круговой велодорожке. Их скорости равны соответственно 27 км/ч, 30 км/ч и 32 км/ч. Через какое наименьшее время они вновь окажутся в одной точке трассы? (Длина велодорожки 400 м.)

Ответ: 24 мин.

Решение. Влад едет быстрее Пети на 3 км/ч. Поэтому он обгонит его на круг (т. е. проедет на 400 м больше) через $\dfrac{0{,}4}{3}$ ч $=$ 8 мин. Тимур едет быстрее Влада на 2 км/ч. Поэтому он обгонит его на круг через $\dfrac{0{,}4}{2}$ ч $=$ 12 мин. Наименьшее общее кратное чисел 8 и 12 равно 24.

Оценивание. За верное решение 7 б.

2. Петя говорит, что если a^7 делится на b^3, где a и b — натуральные числа, то a^2 делится на b. Докажите, что он неправ, приведя опровергающий пример.

Решение. Простейший контрпример $a = 8$, $b = 128$.

Оценивание. За верный пример 7 б.

3. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 < 4b^2c^2.$$

Доказательство. Пусть

$$D = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2.$$

Нужно доказать, что $D < 0$. Разложим D на множители, применяя известные формулы сокращённого умножения:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) =$$

$$= (a^2 - (b + c)^2)(a^2 - (b - c)^2) =$$

$$= (a - (b + c))(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c).$$

По неравенству треугольника, первая скобка отрицательна, а последние две положительны. Таким образом, дискриминант отрицателен.

Оценивание. За верное решение 7 б. За «решение», неявно предполагающее, что $a^2 \geqslant b^2 + c^2$, 2 б. Если же рассмотрен ещё и случай $a^2 < b^2 + c^2$, но от неравенства $(b - c)^2 < a^2$ совершён переход к неравенству $a > b - c$ (вместо $a > |b - c|$), то 5 б.

4. В ребусе

$$\mathbf{К} < \mathbf{О} < \mathbf{Р} > \mathbf{О} > \mathbf{Н} > \mathbf{А} > \mathbf{В} > \mathbf{И} > \mathbf{Р} > \mathbf{У} > \mathbf{С}$$

разные буквы заменяют разные цифры. Сколько решений имеет ребус?

Ответ: 50.

Решение. В ребусе участвует 9 цифр из 10. Отсутствует одна цифра, которую можно выбрать 10 способами. Из условия следует цепочка неравенств $\mathbf{С} > \mathbf{У} > \mathbf{Р} > \mathbf{О} > \mathbf{К}$ и $\mathbf{О} > \mathbf{Н} > \mathbf{А} > \mathbf{В} > \mathbf{И}$. Отсюда буквы **С**, **У**, **Р**, **О** принимают (именно в таком порядке) четыре самых больших значения. Буква **К** — любая из пяти оставшихся цифр. После этого буквы **Н**, **А**, **В**, **И** заменяются по убыванию оставшимися цифрами. По правилу произведения, всего ребус имеет $10 \cdot 5 = 50$ решений.

Оценивание. За верное решение 7 б.

5. Найдите все пары натуральных чисел n и m, для которых

$$(n + 1)(2n + 1) = 2m^2.$$

Ответ: их нет.

Решение. Поскольку $2m^2 = (n + 1)(2n + 1) > 2n^2$, $m > n$. С другой стороны, $2(n + 1)^2 > (n + 1)(2n + 1) = 2m^2$ и $m < n + 1$. Получилось, что $n < m < n + 1$. Это невозможно.

Замечание. Возможны и другие решения. Например, если рассмотреть уравнение как квадратное относительно n, то получим дискриминант $16m^2 + 1$, не являющийся квадратом при натуральном m. Ещё одно решение начинается с наблюдения о том, что $n+1$ и $2n+1$ — взаимно простые числа.

Оценивание. За верное решение 7 б.